上越数学教育研究, 第 19 号, 上越教育大学数学教室, 2004 年, pp.159-170.

実験を伴う関数の授業における子どもの思考過程について

横関　達人
上越教育大学大学院修士課程 1 年

1　はじめに

学習指導要領の解説書の中に、関数指導の意義として次の２つが挙げられている。

・自然現象や社会現象を考察したり理解したりするため、関数的な見方や考え方を必要とする場面が多い。
・いろいろな関数についての理解及びそれらの学習を通して養われる関数的な見方や考え方は、数学のいろいろな分野のこれからの学習において重要な役割を果たす。
（中学校学習指導要領解説―数学編―pp. 46～47）

自然現象や社会現象を考察していくうえで、関数的な見方や考え方を身につけることは子どもの将来にとって非常に有用であり、また関数の内容そのものが数学の他の分野と密接に関わり、根底から支えるものの１つとなっていることがわかる。

しかし現実には、多くの子どもたちにとって関数は苦手な分野の一つとなっている。そこで、現在の関数指導における問題点を明らかにし、関数の指導法の改善を図りたいと考えた。その時に、今回の学習指導要領の中でキーワードになると考えたのが、「身近な事象」、「観察、操作、実験など具体的な活動」の２つである。これら２つのキーワードを基に、より身近な事象を授業の中で再現する意味で、実験を伴う授業に注目したのである。中学校の関数には式化が求められていることから、身近な事象と式化を実験でつなげたいという思いがあった。また、実験をより効果的に試みるために、数学的モデリングを意識した実験を行うことで、子どもの思考がより活性化されていくのではないかと考えた。

本稿では、関数分野において実験を伴う授業について考察し、教授実験のデータを基にして子どもの思考がより洗練されていく過程を探ることで、関数指導における示唆を得ることを目的としている。

2　中学校の関数指導の問題点

現在の関数指導の問題点について、以下の４点にまとめてみた。

第１に、事象そのものが子どもにとって遠い存在に感じられていることである。これは、教科書で身近な事象として提示されるその多くを、我々教師が操作活動などを排除し、形式的に処理することに重点を置いてきた結果であると考える。

第２に、第１と関連するが、その提示の仕方に問題がある。例えば、比例の事象において、比例することを前提として提示されていたり、容易に比例関係が導き出せる場合が多い（中島，1981，pp. 189～190）。関数関係が明らかで深まりそうにない提示の仕方では、生徒の興味が半減し関数の見方や考え方が深

まっていかないのは当然である。

第３に、表・グラフ・式など事象を表現する指導が画一的で分離的なことである。我々教師は、生徒の必要感を無視し事象を忘れて指導していないだろうか。常に子どもに事象を意識させて、事象と表・グラフ・式に一体感を持たせて指導していくことが大切である。

第４に、いろいろな関数の事象を取り上げなくなった点である。現在、中学校では１次関数、２次関数の事象を主に扱っているが、いろいろな事象を眺め、「関数の考え」のもとでその変化の様相を明らかにしていくことはとても意義がある。また、いろいろな関数の事象を比べることで、それぞれの関数の特徴や関数の本質も捉えやすくなるのではないか。子どもたちに、もっと多くの事象に触れさせる機会を与えるべきである。ただ、この点に関してはカリキュラム編成上の問題でもあるので、これ以上の言及は避けることにする。

３　実験を取り上げる意義とその定義

Poincare（1902）は、実験について次のように述べている。

> 実験は真理のただ１つの根源である。実験のみが我々に何か新しいことを教える、実験のみが我々に確実性を与える。（中略）観測するだけでは十分でない。これらの観測を利用しなければならないし、それには一般化を行わなければならない。（Poincare，1902，p．170）

実験は一般化を試みてこそ、その役割を十分に果たすのである。Poincare（1902）はまた、「よい実験」について次のように述べている。

> それは１つの孤立した事実とは別のことを知らせるものであり、我々に予見することを得させる、いいかえれば我々に一般化することを得させるものである。（Poincare，1902，p．172）

実験を授業に取り入れれば子どもの興味や関心を引き、授業が活性化されるという安易な問題ではない。確かに実験には予想や仮説を立てるという活動があり、これが子どもの興味、関心、そして楽しさを引き出す活動であることに間違いはないようである。しかし、子どもが心の底から事象を明らかにし一般化したい、と思える教材を実験として取り上げていく必要がある。一般化につながる「よい実験」を通して、関数的な見方や考え方を伸ばしたい。また、実験の結果を考察していくには的確で簡潔な形として表現する必要性が生まれるだろうし、そこから表、グラフ、式の指導へとつなげていきたい思いがある。

ところで、実験には思考実験も含まれるので、思考実験について触れてみたい。我々教師は意図的、意識的に指導の中に取り入れているかどうかは別として、思考実験そのものは授業でよく見かけるものである。森田（1991）は、思考実験の１つの例として次のような例を挙げている。文字式で、計算結果を「3x＋4y＝7xy」としてしまう子どもがいるが、これが誤りであることを納得させるための指導例である。

> それはｘ＝０、ｙ＝０あるいはｘ＝１、ｙ＝１以外の適当な数値をｘ、ｙに代入し、左辺と右辺とが等しくならないことを示すことである。これは、誤って答えた式に対する反例になっているので、別な言い方をすればこれは思考実験なのである。しかし、指導の実際にこれが思考実験の反例的用法になっていることを意図的に使えば、指導の要点や手順が明確になり、指導はさらに効果的になるのではないだろうか。（森田，1991，p．82）

思考実験の用法や意義を理解し、意図的、意識的に授業に取り入れることで、我々教師の指導に幅ができることが伺える。また、森田（1991）は、実物実験と思考実験を比べて次のように説いている。

> 二つの実験は数学の授業としてどちらが優れているかということはない。生徒の理解の仕方は多様なものなので、理解はどちらからはじまってもよい。そして、両方の実験を理解させることが必要となる。（森田，1991，p．149）

今回は関数分野の学習内容を考えると、２つのキーワードを体現していくことが重要であると考えている。したがって思考実験は大切にしながらも、具体物のある実験そのものを前面に出した方が、より生徒の理解が図れるのではないかと考えた。そこで、本稿では「実験」とは、「実物実験」のことを指し示すこととし、次のように定義する。

> 「実験とは、数学的事実に関する仮説の設定や仮説の検証を、具体物を利用して行う活動」

４　予想と仮説について

実験を伴う授業の中で重要な役割を果たし、授業の原動力となる「予想と仮説」について定義していく。相馬（1993）は、次のように述べている。

> 数学教育における「予想」を次のように定義したい。
> 「問題の結果や考え方について見当をつけること」
> 仮説や見通しは、その背後に論理が存在するのに対し、予想では直観的に見当をつけることも多い。当てずっぽうで予想する生徒もいる。それでもよい。私たちがはじめての問題を解決しようとするときには、むしろそれが自然でもある。そして、予想することによって、その予想を確かめるという段階に自然に進むのである。このように、「予想」を、直観を含めて広くとらえたい。（相馬，1993，p．195）

今回は実験の中における「予想」についてであるが、数学の授業において広く行われる「予想」とそれほどの変わりはない。したがって、次のように定義する。

> 「予想とは、実験の結果や考え方について見当をつけること」

次に、「仮説」についてである。再び、Poincare（1902）の一文を引用したい。

> あらゆる一般化はそれぞれ１つの仮説である。（中略）ただ仮説には、いつでもできるだけ早く、できるだけ何度も、検証を行わなければならない。（中略）くつがえされた仮説は結果を生まなかったか。それどころではない、こういう仮説は本当である仮説よりももっと余計に役にたったといえる。（Poincare，1902，pp．180～181）

仮説を立てることに意味があり、いかなる仮説も真の仮説へ向けて役立つのである。また、仮説は子どもの活動を導くものでもある。したがって、子どもには意欲を持って仮説を立てさせたい。そのときに、子どもはある程度直観で仮説を立てるかもしれない。しかし、筆者は論理の飛躍が直観であると捉えているし、何かしら先の見通しを持って仮説を立てるはずである。先の見通しとは、通常論理的と言われるが、直観という飛躍もある。また、数学は論理的だが、現実が論理から離れていく場合もあるので、必ずしも「論理的」とい

う言葉にとらわれなくてもよい。今回は関数分野であることを特に重視して、筆者は「仮説」を次のように定義する。

「仮説とは、伴って変わる二変量の関係を見当をつけて説明すること」

例えば、今回の教授実験での「予想」とは、「何秒後かに転がった距離」の見当をつけることであり、仮説とは、「距離は時間の２乗に比例するのではないか」と見当をつけて考えることである。

５　数学的活動の中の実験について

数学的活動にはたくさんの活動が含まれる。例えば外的な活動としては、作業、体験、操作、観察、調査、実験などであり、内的な活動としては、直観、抽象、拡張、類推、帰納、演繹などである。これらの活動が、子どもにとって真に望ましい姿になるのはどのようなときであろうか。中島（1981）は、我々教師に次のような「創造的な学習指導」を望んでいる。

「算数や数学で、子どもにとって新しい内容を指導しようとする際に、教師が既成のものを一方的に与えるのではなく、子どもが自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出すように、教師が適切な発問や助言を通して仕向け、結果において、どの子どもも、いかに自分で考え出したかのような感激をもつことができるようにする」（中島，1981，p．70）

これを、子どもの側から考えると、「創造的な学習活動」ということになるのではないか。つまり、数学的な活動の望ましい姿とは、子どもが自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出すことであり、自らが考え出したかのような感激を感じられる活動となるときである。

実験は、結果を得るために自らの課題として捉えることができる。予想や仮説の設定や棄却、自分の考えを修正するなどの活動が必要感を持って繰り返され、子どもの間でもより練り合いが見られることとなる。また、実験結果が予想通りにいったり事象を形式的に表現できたときには、自らが考え出せたかのような感激も得られるはずである。これらのことから、実験は「創造的な学習活動」の１つであると言えるだろう。

６　関数の定義とその指導及び関数分野における実験について

ここでは、中学校における関数の定義や指導観、実験との関わりについて述べてみたい。

まず、関数を定義していくことについて、高橋（2003）の関数の定義、現在の教科書の定義を概観していくことにする。高橋（2003）は、次のように述べている。

数学教育改良運動期に特徴のあった関数教材も、数学教育現代化においては構造中心の教材となった。（中略）この関数の定義は、

集合Ｘの要素ｘと集合Ｙの要素ｙとでつくられる順序対（ｘ，ｙ）を要素とする集合があってｘの値を決めるとｙの値がただ１通りに決まるとき、この順序対の集合を関数という。

である。今日の伴って変わる二変量に力点をおいた定義は教科書では、

ともなって変わる２つの変数ｘ、ｙがあって、ｘの値を決めると、それに対応するｙの値がただ１つ決まるとき、ｙはｘの関数である。（高橋，2003，p.52）

また現在の教科書によれば、啓林館では次のように定義されている。

一般に、ともなって変わる２つの変数ｘ、ｙがあって、ｘの値を決めると、それに対応してｙの値が１つに決まるとき、ｙはｘの関数であるという。

他の教科書でもほぼ同様の定義がなされているが、現在の教科書の定義は、現代化の頃の構造の考えに基づくものよりも、むしろ改良運動期の解析学を発展させてきた頃の定義を反映させてきている。現代社会における関数の活用を考えたとき、やはり二変量をどのように関連づけて捉えるかということが重要なことである。したがって筆者は高橋（2003）を踏襲し、現在の教科書に準じて関数を次のように定義する。

「一般に、伴って変わる２つの変数ｘ、ｙがあって、ｘの値を決めると、それに対応するｙの値がただ１つに決まるとき、ｙはｘの関数である。」

次に大切なことは、どのような立場で二変量を捉え関連付けていくかということである。特に、我々教師は指導する際に明確な「関数の考え」を持たなければならない。そこで、NCTM の第 9 年報の第 3 章を参考にした。この第 3 章の題目は「関数概念の心理学」となっており、関数性という概念は４つの主要な構成要素を持っているとしている。すなわち、「集合、階級、変数、対応」の４つであり、この論文はこれらを詳しく説明している。ただ、その内容は数を越えていたり時に心理学にまで及んでおり、中学生への指導を考えるとやや飛躍した感は否めない。そこでその内容に関しては、中学生へ直接指導するわけではないが、我々教師が念頭に置いておくべきものと筆者は捉えている。中島（1981）は、まず「集合」、次に「対応」を考えるとかというように、形式的になっているような研究や指導が少なくないと指摘し、４つの構成要素を有機的なつながりをもって、その主要なアイデアなり手法として溶け込んだ姿で関数の考えを活用したり、そうした立場での研究を望んでいる（p. 178）。筆者は、この我々教師に対する思いを十分に汲み、中島（1981）の提唱する「関数の考え」を基に指導に臨みたいと考えている。中島（1981）は、次のように述べている。

出来上がった「関数」を教えるという立場ではなく、公式などを指導する際に、まず、科学的な立場に立って課題をとらえ、対処しようとするかどうかが基盤になる。

そこでは、たとえば、「新しく考察の対象としている未確定の、または複雑なことがら（これをｙとして）を、よくわかった、または、コントロールのしやすいことがら（ｘ）をもとにして、簡単にとらえることができないか。このために、何を（変数ｘ）として用いたらよいか。また、そのときに、対応のきまり（法則ｆ）はどんなになるか」というような考えに立つことが、「関数の考え」の基盤として考えられる。（中島, 1981, pp.180～181）

我々がこのような立場に立ってはじめて、子どもは関数を少しずつ理解していき、伴って変わる二変量を捉えることができるのだろう。また、次のようにも述べている。

「関数の本質」は、「一つのもの」を「ほかのもの」と関連づけてみようとすることにあるわけで、これは、われわれ人間が、ものを「考える」ということ、ものが「わかる」ということの本質でもある。（中島, 1981, p. 181）

中島（1981）は、自然の事象の中から、「関数の考え」の立場に立って、「考えよう」「わかろう」とすることこそ、科学的な精神に通

じ、「関数の本質」に近づくものであると述べている（p. 181)。このことを具現化するためには、授業の中にできるだけ自然な事象を再現することが必要になってくるのではないか。子どもに「出来上がった数学を教える」ことでもなく、また子どもが「出来上がった数学を知る」ことでもなくて、様々な活動を通して子ども自身の手で法則や性質を発見していくことにこそ、数学の面白さ、楽しさが味わえるのだと思う。実験は出来上がったものではなく、子どもが創り上げていく部分の多い活動である。実験を通して子どもたちは関数そのものを体感し、それが関数の見方や考え方を伸展させ、関数の本質を捉えていくことにつながるのではないだろうか。

７　関数教材における実験と数学的モデリング

これまで述べてきたように、筆者は実験を取り入れて関数教材を扱いたいと考えている。しかし、ただやみくもに実験を取り入れるだけでは、その効果も半減してしまうだろう。そこで、数学的モデリングの一連の活動を意識した実験を行うことで、実験は意図的となり相乗効果が望めるのではないかと考えたのである。

Slavit（1997）は関数教材について、１つの教材でも多様な視点が考えられ、様々なモデルを生み出すきっかけになることを述べている。特に、関数概念の獲得は、心の底からのアクションに連結されていると述べている（p. 264)。ここでのアクションとは子どもの心的な活動を指すものであり、それがモデルとなって表現され、関数概念の獲得に大きく関わってくるのだろう。

適切な関数教材を扱い、数学的モデリングを意識した実験の中で数学的モデルを創りながら二変量の関係を明らかにしていくことは、関数概念の獲得を大きく押し進めてくれるのではないだろうか。

８　数学的モデリングの定義

三輪（1983）は、次のように数学的モデリングを定義している。

「それまでの経験・観察を基にして、ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で、
（１）その事象に光を当てるように、数学的問題に定式化する（定式化)。
（２）定式化した問題を解く（数学的作業)。
（３）得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて、その有効さを検討し、評価する（解釈・評価)。
（４）問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化)。」

これらの段階については、当然、順序通りに機械的、直線的に進むものではなく、何回もの逆行あるいは飛躍があり得るとしている。また、三輪（1983）は「数学的モデルは数学的手段を主な表現方法としているもの」と述べているが、それは決して数や式のみに限定された意味ではなく、図や表、グラフといった視覚的手段によるものも、数学的モデルになり得ると考えてよさそうである。

西村（2001）は、三輪の数学的モデリングを参考にして図式的に４サイクルで定義しているが、両者とも大まかな流れに変わりはない。その違いを強いてあげるとすれば、現実世界やその問題を数学的モデルに定式化していく過程で、西村（2001）は、「数学的な問題場面」を設けている点である。これは、定式化段階をより段階を踏んで丁寧に扱っていこうとする意識の表れではないか。以下に、西村（2001）の定義を示すことにする。

「それまでの経験・観察をもとにして、ある事象が探究を要するという認識があるという前提の下で、
（１）　その事象を目的に合った数学的な

問題場面に作り替える。(定式化)

(2) 数学的な問題場面から数学的モデルを導く。(数学的モデルの作成)

(3) 数学的手法を用いて、数学的結果を得る。(数学的作業)

(4) 得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて、その有効さを検討し、評価する。(解釈・評価)

(5) 必要に応じて(1)～(4)を繰り返し、現実世界の問題のより進んだ解決を図る。」

以下に、両者の数学的モデリングについて図式的に示すことにする(図1・図2)。

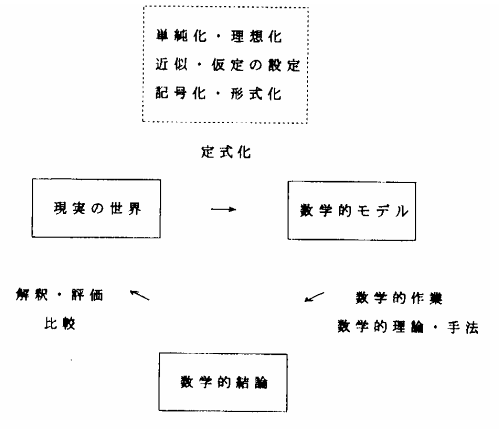

図1　三輪の数学的モデリング

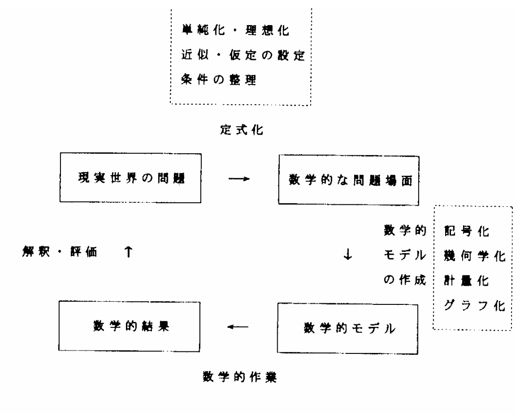

図2　西村の数学的モデリング

両者とも図の左上に「現実の世界」、「現実世界の問題」を置いているが、これは今回の学習指導要領の「現実の事象から…」という教育目標を的確に捉えていると考えている。

9　素朴なモデルと数学的モデル

先に紹介した2つの数学的モデリングでは、「数学的モデル」を導き、数学的手法を用いて現実世界の問題を解決していくことに役立てている。このときの「数学的モデル」は教材を視点としたモデルである。筆者は、そこに子どもの活動や思考過程を見取る視点を加えて認知モデルとして考察していきたいと考えている。そこで、Freudenthal 派の研究を概観することにした。

子どもが現実世界における算数・数学的活動を通して、算数や数学を経験し、知識を構成することを目指す立場に、Freudenthal 派による現実的数学教育 Realistic Mathematics Education(略称 RME)がある(高橋, 2003, pp. 41～42)。この流れを汲む Gravemeijer(1997)は、RME の鍵となる原理の1つを次のように述べている。

> モデル(具体化)が習慣的情報処理プロセスにおいて、前もってつくられた(組み立て式の)モデルとして提示されるのに反して、現実主義の数学教育におけるモデルは、生徒自身によって開発される。すなわち、モデルは問題を解決する際に発展する。それらは、問題状況や解決手続きをモデル化する際に表面化する。従って最初は、モデルは生徒によく知られている状況のモデルである。一般化し、フォーマル化するプロセスによって、それからそのモデルは、それ自体の本質となり、このモデルを数学的な推論を行うためのモデルとして使うことを可能にする。(p. 26)

Gravemeijer(1997)は、モデルが「situations」に依存した原始的な「model of」から数学的構造を反映した「model for」へと発達していくことを説いているのである。

また、モデルの自己発達の段階を示すものとして、数学的モデリングの特集の書物の中であえて認知学的に次のような図を示している（図３）。

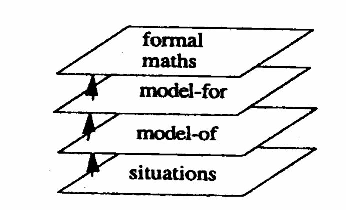

図３　Gravemeijer のモデルの段階

子どもの思考過程は複雑であるため、その思考過程を見取るためには、子どもがどのようなモデルを考え出しどのように活用するのかを的確に判断していく必要がある。そこで、筆者はGravemeijer（1997）のモデルを参考にして、「model　of＝素朴なモデル」、「model　for＝数学的モデル」と捉え、数学的モデリングの「数学的モデル」を「素朴なモデル」と「数学的モデル」の２つに分けて考えることにする。中学校の関数においては式化が１つの目標なので、「素朴なモデル」としては図や表、グラフ、「数学的モデル」としては関数の式がそれぞれの一例として挙げられる。式化は「数学的モデル」の１つの目安になると考えているが、例えば表であっても、「fomal　maths」へ向かうモデルであると判断できれば、それは「model　for＝数学的なモデル」に成り得ると考えている。

子どもの心の内を見ることはできないし、その思考のレベルは輪切りのように単純に表せるものでもないが、モデルはその思考を端的に表現したものである。したがって、子どもがどのようなモデルを考え出したかによってどの程度のレベルに達しているのかは認知することができる。それは、Gravemeijer（1993）が階層化して示したように、モデルにはレベルが存在するからである。

10　実験を取り入れた数学的モデリング

先の２つの数学的モデリングを基に、実験を意図的に、そしてより効果的に行うために、実験を取り入れた数学的モデリングについて考え定義していく。

まず、現実世界の問題としてその法則や結果を明らかにしたい事象に注目し、実験したい部分を取り上げる。そして実験を試行し、ある一定の実験結果を得ることとなるが、それは現実世界の結果として受け取ることができる。これらの実験結果を数値化し、数学的モデルを作成して、法則や結果を数学的結論として考察していくのである。

ここで、筆者は「数学的モデル」を「素朴なモデル」と「数学的モデル」に分けたが、「数学的モデル」は「素朴なモデル」がより洗練された結果のモデルであると捉えている。「素朴なモデル」でもある程度数学的な解決が図れるのだが、次の課題で解決できないときにより洗練されて「数学的モデル」となり、サイクルが繰り返されていくと考えたのである。以上をふまえて、実験を取り入れた数学的モデリングを次のように定義する。

「それまでの経験・観察をもとにして、ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で、

（１）その事象から実験できる部分を取り出し、実験する。（試行）

（２）実験結果から、数学的モデルを導く。（数学的モデルの作成）

（３）数学的手法を用いて、数学的結果を得る。（数学的作業）

（４）得られた数学的結果をもとの事象や実験結果と関連づけて、その有効さを検討し、評価する。（解釈・評価）

（５）必要に応じて（１）～（４）を繰り返し、問題のより進んだ定式化を図る。」

「試行」では、実験の条件の整備や実験結果に対する予想・仮説を設定し、その結果は数値化していく。「数学的モデルの作成」では、実験結果の数値を図化、表化、グラフ化、式化していく。このときに、モデルの洗練が行なわれ、式化が行なわれていくのである。「数学的作業」はこれら「素朴なモデル」、「数学的モデル」をもとに、法則や二変量の関係を調べる過程である。「解釈・評価」は、もとの事象はもとより、もう１度実験結果に戻ってサイクルが進み、その有効さを検討する場合もある。なお、サイクルの中で常に仮説の設定や棄却が繰り返されており、子どもの活動を導いていると筆者は考えている。

この数学的モデリングを図式的に示せば、次のようになる（図４）。

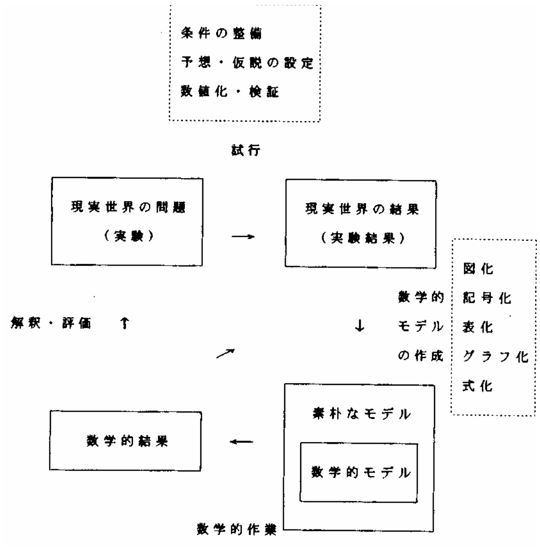

図４　実験を取り入れた数学的モデリング

モデルの発達について、Gravemeijer は図３のように階層化して表しているが、筆者は図４のように内側へ向かうことで表している。また、Gravemeijer の「situations」は、筆者は「現実世界の問題」や「現実世界の結果」に相当するとし、図４のサイクルが何度も繰り返される中で「fomal maths」へと近付いていくものと考えている。

11　教授実験と子どもの思考過程について

これまで述べてきたことをもとに、子どもの思考過程を探るべく関数の授業の中で実際に実験を取り入れて行ってみた。

11．１　概要

2 次関数の式化を目標にして、「斜面を転がる球の実験」を、平成 15 年 12 月から平成 16 年 1 月にかけて３時間の授業で行った。石川県公立中学校 3 年生の選択授業１クラス 22 名を対象とし、このクラスを４～５名の５つの班に分けて、各班ごとに実験を繰り返してもらった。

１時間目は、１秒間に 10cm 球が転がる斜面を設定し、2 秒後、３秒後、４秒後を予想して実験、さらにそれらの数値をもとに「５秒後を予想してもう１度実験を試みる」という内容であった。２時間目は１時間目の実験がかなりの誤差を含んでいたため、４秒で 160cm 転がる坂を設定し、1 秒から５秒までのデータを再度取り直して、それらの数値をもとに「6 秒後と 12.5 秒後の転がる距離を予想しよう」という内容であった。3時間目は、２時間目に式化ができたので、その式をさらに一般化させ「落体の法則」にも触れてこれまでの数学的知識を確かめる内容であった。

授業の様子は、2 台の VTR で記録した。また授業後に、何人かの生徒に対してそのモデルを考えた理由を聞くインタビューも行っており、これも VTR で記録した。毎時間のワークシートと感想も合わせて回収した。

11．2　考察

教授実験をもとに、子どもの思考過程について考察していくことにする。

１時間目の課題では、実験データをもとに子どもたちから様々な「素朴なモデル」が考え出され、課題の解決を試みていた。1 秒から４秒までの数値をただ眺めていただけでは５秒後の予想はできないので、足掛かりとな

るモデルが必要となったのである。それらは表化、グラフ化、式化されたものであるが、これらが「素朴なモデル」である。一例として、以下の図は教授実験の１時間目に松木君（子どもの氏名は仮名）が考え出したモデルである（図５)。

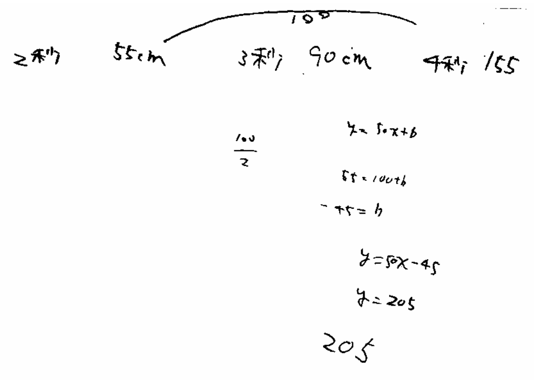

図５　素朴なモデル

図５は、単に時間と距離を横に並べてみた表のようなものと、その表をもとに時間と距離を１次関数の式で表せないかと試みた式である。これらはまだ「situations」に依存しており、「model　of＝素朴なモデル」と判断することができる。子どもたちのこのようなモデルをもとに、授業が展開していったのである。１時間目の授業を数学的モデリングの図で示すと、次のようになる（図６)。

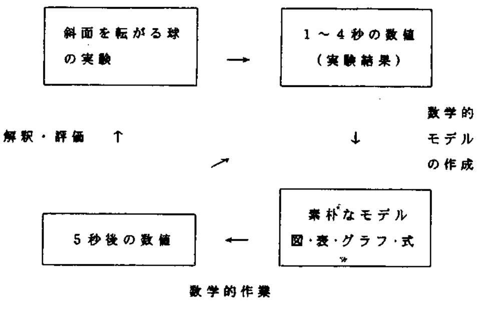

図６　１時間目の数学的モデリング

２時間目の課題は「素朴なモデル」では解決が図れず、モデルの洗練が必要となった。具体的に挙げると、「12.5 秒後の距離を求める課題」は、「素朴なモデル」では解決しにくい課題である。子どもの思考も横への変化から縦への対応を迫られることになり、思考に変化が求められるのである。子どもの解決したいという欲求は、心的構成物であるモデルへと向けられる。モデルの変化も求められるのである。高橋（2003）は、ときに「湧き出させる」と表現するが、心的欲求が新たなモデルを湧き出させるのではないか。その結果、モデルの自己発達が起こるのである。次の図は、同じく松木君の２時間目のモデルである（図７)。

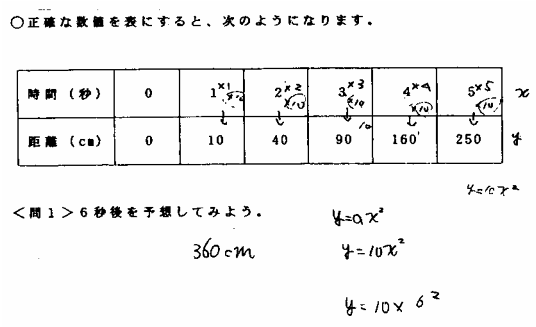

図７　数学的モデル

図７について、表は教師が与えたものの、書き込みがしてありその内容は明らかに２次関数の式の構造を示していることが伺える。また、「６秒後の距離を求める課題」は、２次関数の式を利用して求めている。これらは「fomal　maths」へと向かっており、「model　for＝数学的モデル」と判断することができる。２時間目の授業を同様に図で示すと、次のようになる（図８)。

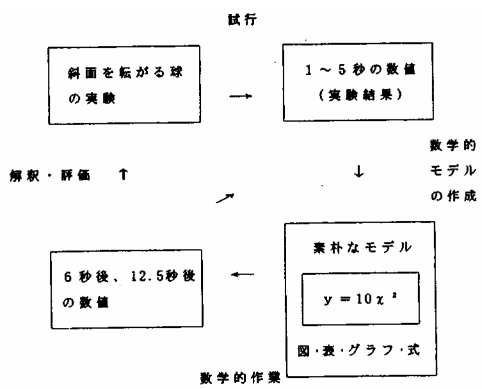

図８　２時間目の数学的モデリング

図６と図８を比較すると、１時間目から２時間目にかけて、明らかにモデルの自己発達が起こり、数学的モデリングのサイクルを繰り返している。そのサイクルの中で、モデルの自己発達とともに関数的な見方や考え方も伸展していったと考えている。

11．３　反省と課題

反省点としては、子どもに実験を割と自由に試みてもらった分、実験結果にかなりの誤差を含んでしまったことである。その結果、子どもは「時間と距離」の変化や対応に注目しながらも正確な数学的モデルを得るには至らず、数値を曖昧なまま結論づけてしまった。またこれに関連して、時間的余裕がなかったために、最後に教師が実験をして正しい数値を与えてしまい、誤差を含んだ数値をどう処理していくかという大切な活動場面を子どもから奪ってしまった。これも大きな反省点である。

したがって今後の課題としては、子どもが試みてもできるだけ正確な数値を得られるような実験の条件整備や工夫、実験結果の誤差をどこまで容認し、その誤差を子どもとともにどう修正していくかなどが挙げられる。

12　おわりに

実験を伴う授業を行ってみたが、関数分野の指導という点で大いに効果があった。それは、実験を通して子どもがいろいろなモデルを考え出し、二変量を捉えようとしたことから伺えた。そこに、関数的な見方や考え方の伸展を見取ることができたからである。では、実験を伴えばそれでよいのか、というとそうではない。実験を伴う際に大切だと感じたことは、「適切な課題を与えること」、「予想や仮説を立てること」、「数学的モデリングを意識すること」の３点である。適切な課題は「予想や仮説を立てること」への刺激となり、子どもの豊かな活動を導いていく。そして、その解決の過程でモデルの自己発達が起こるのである。ただ、「数学的モデリング」については必ず意識を、ということではなく、「実験の流れ」を大切にする、それが筆者の場合は「数学的モデリング」であったということである。筆者はこの３点に配慮することで、子どもの思考が活性化され、関数の良き指導につながっていくと考えている。

もちろん適切な支援を行っていかなければならないが、そのためには子どもが考え出した様々なモデルを、教師が的確に見取る力量を持たなければならない。そのときに Gravemeijer（1997）が述べる「of か for か」の視点はとても重要だと感じている。子どものモデルを的確に見取れたときに、適切な支援が行えるのであり、数学化へ向けて子どもの思考の活性化を促せるのである。

まだまだモデルのデータも少ない中での考察であるが、現在までの考察及び教授実験で、効果的な関数の指導法における手がかりは少しずつ掴めてきたように思う。今後も上記の３点を柱に研究を重ね、モデルに対する具体的な支援の在り様を探り、より効果的な関数の指導法を目指したい。

＜引用・参考文献＞

文部省（1998）．中学校学習指導要領．財務省印刷局.

文部省（1999）．中学校学習指導要領解説ー数学編ー．大阪書籍.

中島健三．（1981）算数・数学教育と数学的な考え方ーその進展のための考察ー．金子書房.

森田俊雄．（1991）．算数・数学教育の新展開ー局所的な数学と思考実験ー．東洋館出版社.

高橋等．（2003）．数学的知識を創発させる教材開発．今こそ Do　Math！．上越数学教育研究会Σ会著，pp．45〜54.

高橋等．（2003）．子どもの算数・数学的活動

を大事にする，湧き出させる．上越数学教育研究第 18 号，pp．31～48.
ポアンカレ．（1902）. 科学と仮説. 岩波文庫.
松宮哲夫・柳本哲．（1995）．総合学習の実践と展開ー現実性をもつ課題からー．明治図書.
三輪辰郎．（1983）. 数学教育におけるモデル化についての一考察．筑波数学教育研究第２号，pp．117～125.
西村圭一．（2001）. 数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究．日本数学教育学会誌第 83 巻，第 11 号.
池田敏和・山崎浩二．（1993）数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究．日本数学教育数学会誌第 75 巻，pp．26～32.
飯島康男．（1985）．算数・数学の指導に取り入れる実験の意義についてー図形の重心の概念の指導を中心にー．日本数学教育学会第 18 回数学教育論文発表会論文集，pp．1～4.
飯島康男．（1986）．算数・数学の指導に取り入れる実験の意義について(2)ー立方体を対角線のまわりに回転してできる立体の取り扱いを中心にー. 日本数学教育学会第 19 回数学教育論文発表会論文集, pp. 89～92.
飯島康男．（1987）．算数・数学の指導に取り入れる実験の意義(3)ー上弦の月の形（弦の傾き）と位置を題材としてー．日本数学教育学会第 20 回数学教育論文発表会論文集，pp．164～169.
相馬一彦．（1993）. 数学教育における「予想」の意義．第 26 回数学教育論文発表会論文集，pp．193～198.
大澤弘典．（1997）．中学校における数学的モデリングの指導についての研究ー生徒によるグラフ電卓の利用を視点としてー．上越教育大学大学院修士論文.
桐山眞一．（1998）．中学生における関数の理解に関する研究ー一次関数を事例としてー. 上越教育大学大学院修士論文.
林弘．（2000）．中学校における関数指導に関する研究ー事象からモデルを構成する活動を重視してー．上越教育大学大学院修士論文.
高橋薫．（2001）．一次関数の学習過程に関する研究ー事象から表現への過程に焦点を当ててー．上越教育大学大学院修士論文.
江口賢哉．（2002）．数学の授業における実験の役割に関する実証的研究ー抽出生徒の探求活動の分析を手がかりとしてー．上越教育大学大学院修士論文.
Gravemeijer，K．（1993）．Modelling two ー digit addition and subtraction with an empty number line. Primary education．(pp．51～61).
Slavid，D．（1997）．An alternate route to the reification of function . Educational Studies in Mathematーics，33，259ー281.
福森信夫ほか 36 名．（2001）．数学 2 年．啓林館.
杉山吉茂ほか 27 名．（2001）. 新しい数学 2. 東京書籍.
一松信ほか 29 名．（2001）．中学校数学 2. 学校図書.
正田實ほか 23 名．（2001）．中学数学 2．大阪書籍.